UITWERKINGEN

probleem van de week
uitwerkingen

Inhoudsopgave

1. Het vouwblaadje

In ΔPDA geldt de stelling van Pythagoras:

$$x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$$
$$x^2 + 16 = 64 - 16x + x^2$$
$$16x = 48$$
$$x = 3$$

Dat is al bijzonder. Het is een 3-4-5-driehoek.

Er geldt: $\Delta PDA \sim \Delta DQB$ Ga na!

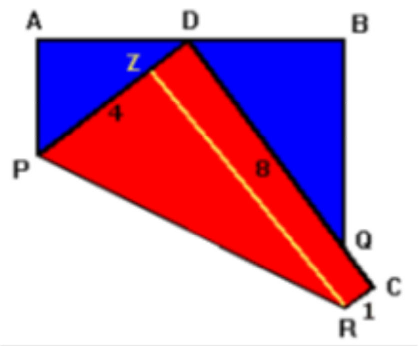
ΔPDA	PD = 5	DA = 4	PA = 3
ΔDQB	DQ = ⋯	QB = ⋯	DB = 4

$DQ = \frac{20}{3}$ en $QB = \frac{16}{3}$

Er geldt: $\Delta DQB \sim \Delta RQC$

ΔDQB	$DQ = \frac{20}{3}$	$QB = \frac{16}{3}$	DB = 4
ΔRQC	$RQ = \frac{5}{3}$	$QC = \frac{4}{3}$	RC = 1

In driehoek PRZ geldt: DC = 8 en PZ = 4.



$$PR^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$$
$$PR = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Conclusie

$PR = 4\sqrt{5}$

2. Driehoeken

Neem eerst een concreet voorbeeld. Bijvoorbeeld $\angle A=20^o$.

- ✔ $\angle A=20^o$
- ✔ $\angle AFD=20^o$
- ✔ $\angle ADF=140^o$
- ✔ $\angle FED=40^o$
- ✔ $\angle DFE=100^o$
- ✔ $\angle EFC=60^o$
- ✔ $\angle FCE=60^o$
- ✔ $\angle ECB=30^o$
- ✔ $\angle B=75^o$

Maar dat klopt niet want $\angle A+\angle B=90^o$

Neem $\angle A=x^o$.

- ✔ $\angle A=x$
- ✔ $\angle AFD=x$
- ✔ $\angle ADF=180-2x$
- ✔ $\angle FED=2x$
- ✔ $\angle DFE=180-4x$
- ✔ $\angle EFC=3x$
- ✔ $\angle FCE=3x$
- ✔ $\angle ECB=90-3x$
- ✔ $\angle B=\frac{3x+90}{2}$

Nu geldt:

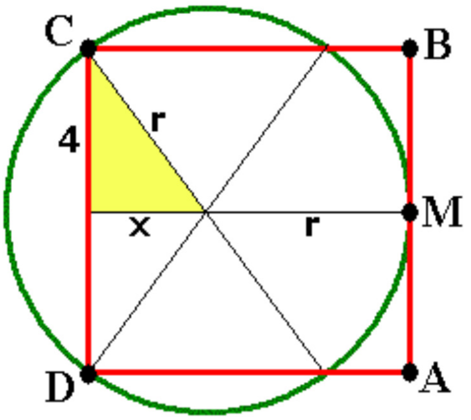
$\angle A+\angle B=90^o$
$x+\frac{3x+90}{2}=90^o$
$x=18^o$

Controle:

- ✔ $\angle A=18^o$
- ✔ $\angle AFD=18^o$
- ✔ $\angle ADF=144^o$
- ✔ $\angle FED=36^o$
- ✔ $\angle DFE=108^o$
- ✔ $\angle EFC=54^o$
- ✔ $\angle FCE=54^o$
- ✔ $\angle ECB=36^o$
- ✔ $\angle B=72^o$

$\angle A+\angle B=18^o+72^o=90^o$. Klopt!

3. Een cirkel en een vierkant



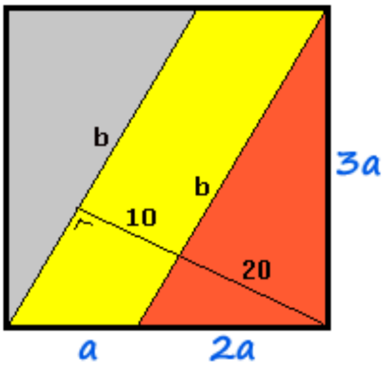
Er geldt:

$x + r = 8$
$r^2 = x^2 + 16$

Oplossen geeft:
$r^2 = (r - 8)^2 + 16$
$r^2 = r^2 - 16r + 64 + 16$
$16r = 80$
$r = 5$

4. Stroken

Je kunt de zijde van het vierkant verdelen in a en $2a$. Je krijgt dan de volgende berekening:



$$Opp = (3a)^2 = 9a^2$$

$$b = a\sqrt{13}$$

$$Opp = 3 \times 10 \times a\sqrt{13} = 30a\sqrt{13}$$

$$9a^2 = 30a\sqrt{13}$$

$$3a = 10\sqrt{13}$$

$$a = 3\tfrac{1}{3}\sqrt{13}$$

$$Opp = 9\left(3\tfrac{1}{3}\sqrt{13}\right)^2 = 300$$

5. Twee metselaars

Als de eerste metselaar x uur over het bouwen van een toren doet dan doet de tweede metselaar daar $x + 9$ uur over.

De eerste metselaar bouwt $\frac{1}{x}$ torens per uur en de tweede metselaar bouwt $\frac{1}{x+9}$ torens per uur.

Er geldt:

$$20 \cdot (\frac{1}{x} + \frac{1}{x+9})=1$$

Oplossen geeft: $x = 36$

De ene metselaar doet er 36 uur over en de andere metselaar doet er 45 uur over.

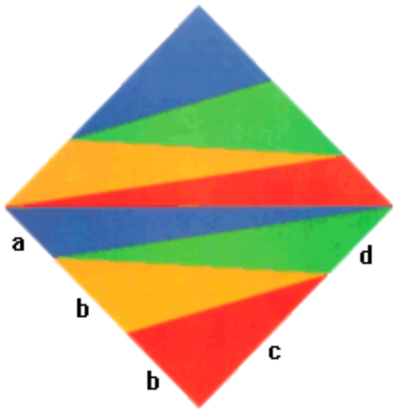
6. Drie dochters

Schrijf alle mogelijk ontbindingen van 36 met 3 factoren op en kijk naar de som:

$1 \cdot 1 \cdot 36$	38
$1 \cdot 2 \cdot 18$	21
$1 \cdot 3 \cdot 12$	16
$1 \cdot 4 \cdot 9$	14
$1 \cdot 6 \cdot 6$	13
$2 \cdot 2 \cdot 9$	13
$2 \cdot 3 \cdot 6$	11
$3 \cdot 3 \cdot 4$	10

Als je 't huisnummer weet en je weet het dan nog niet, dan moet het 1-6-6 of 2-2-9 zijn. Als de 'oudste dochter piano speelt' dan moet het wel 2-2-9 zijn.

7. Max Bill



De oppervlakte van het vierkant is 64. De 8 driehoeken hebben allemaal dezelfde oppervlakte. De oppervlakte van één driehoek is 8.

Kijk naar de driehoek waar a bij staat. De lengte van a ken ik niet maar ik weet wel de **hoogte** en de **oppervlakte**. Daarmee kan je a berekenen:

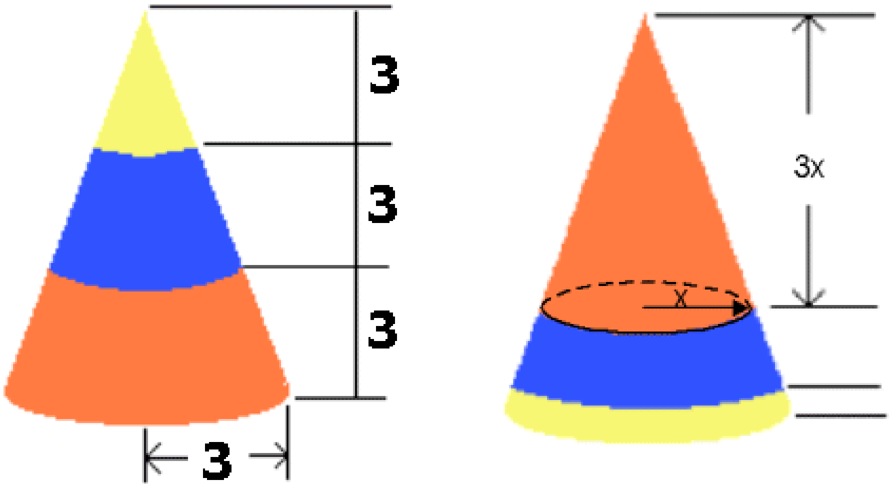
$Oppervlakte = \frac{1}{2} \cdot zijde \cdot hoogte$

$8 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 8$ dus $a = 2$.
Nu ken je b ook. $b = 3$

In de driehoek waar b en c staat:

$8 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot c$ dus $c = 5\frac{1}{3}$.
$d = 2\frac{2}{3}$.

8. Kegel



Bereken eerst de inhoud van het 'rode gedeelte' aan de linkerkant:

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 9 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 19\pi$

Voor het rode stuk aan de rechterkant geldt:

$Inhoud = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot 3x$

Er geldt:

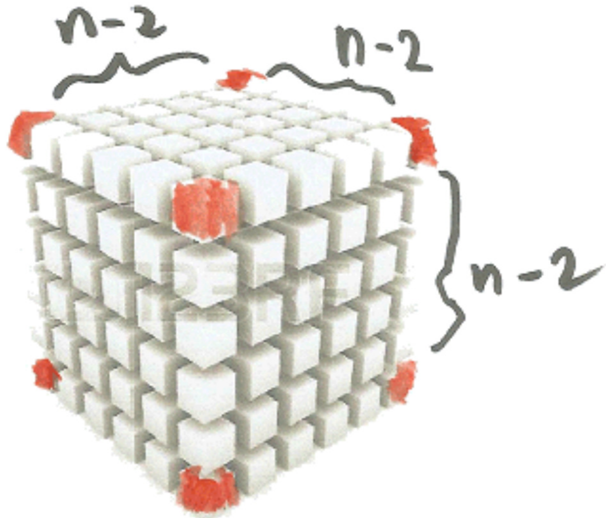
$\frac{1}{3}\pi x^2 \cdot 3x = 19\pi$
$x^3 = 19$
$x = \sqrt[3]{19}$

De hoogte van het rode stuk is $3\sqrt[3]{19}$.

9. Kubusjes

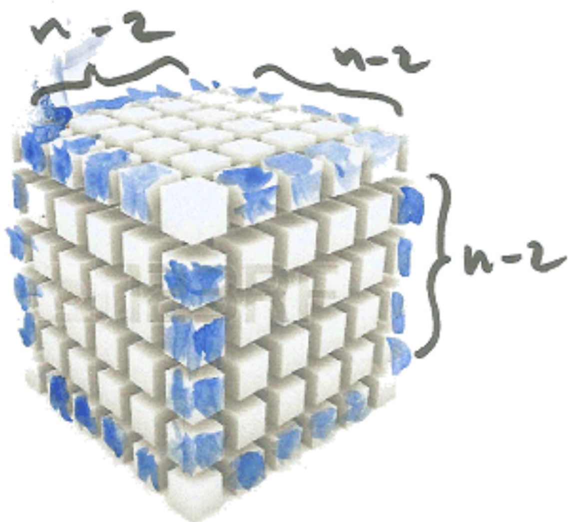
Kubusjes met 3 rode vlakjes

Deze kubusjes zitten op de hoekpunten. Een kubus heeft 8 hoekpunten. Er zijn dus 8 kubusjes met 3 rode vlakjes.



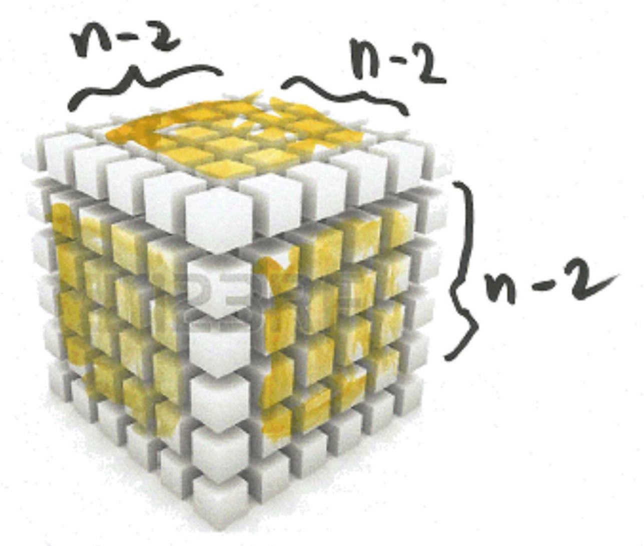
Kubusjes met 2 rode vlakjes

Deze kubusjes zitten op de ribben. Bij een ribbe van n kan je n-2 kubusjes vinden met twee rode vlakjes. Je hebt 12 ribben dus er zijn 12(n-2) kubusjes met twee rode vlakjes.



Kubusjes met 1 rood vlakje

Deze kubusjes zitten op de grensvlakken. Elk zijvlak bestaan uit $(n-2)^2$ kubusjes met 1 rood vlakje.
Er zijn 6 grensvlakken. Je hebt $6(n-2)^2$ kubusjes met 1 rood vlakjes.



Kubusjes zonder rode vlakjes

De kubusjes die niet aan de buitenkant zitten hebben geen rode vlakjes.
Dat zijn er $(n-2)^3$

Controle

Als het goed is moet $8 + 12(n-2) + 6(n-2)^2 + (n-2)^3$ gelijk zijn aan n^3. Dat klopt...

- ✔ Er zijn 8 kubusjes met 3 rode vlakken.
- ✔ Er zijn $12\cdot(n-2)$ kubusjes met 2 rode vlakken.
- ✔ Er zijn $(n-2)^3$ witte kubusjes.
- ✔ Er zijn $6\cdot(n-2)^2$ kubusjes met 1 rood vlak.
- ✔ Samen zijn dat n^3 kubusjes.